سیزدهمین کنفرانس دانشجویی مهندسی برق ایران
دانشگاه تربیت مدرس، ۲۴- ۲۶ شهریور ۱۳۸۹

کاربرد موجک در تقریب توابع یک بعدی و حل معادلات دیفرانسیل معمولی

سید محسن موسوی دزفولی   دانیال خشابی
دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر(پلی تکنیک)، تهران، ایران
moosavi.sm@gmail.com   d.khashabi@gmail.com

چکیده - در این مقاله ابتدا به معرفی مقدماتی در مورد موجک[1]، ویژگی‌های آن و معرفی کلی کاربردهایی از آن پرداخته می‌شود. در ادامه استفاده از آن برای تقریب توابع نشان داده خواهد شد. تقریب معرفی شده اساسا برای توابع یک بعدی است و برای بالاتر از یک بعد تنها به ذکر روابط آن بسنده شده است. با توجه به مقدماتی که در مورد تقریب توابع گفته شد، از موجک برای تقریب عددی جواب معادلات دیفرانسیل استفاده شده است. در روند رسیدن به جواب نشان داده شده‌است که این روش عددی معرفی شده، می‌تواند در بدست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، بسیار کارامد عمل کند. نمونه‌ای از حل معادله‌ی دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت آورده شده است.

کلید واژه- موجک، Haar Wavelet، معادلات دیفرانسیل معمولی.

۱- مقدمــه

تئوری موجک در ۲۰ سال اخیر توسعه‌ی زیادی یافته است. بطوریکـه کـاربردهـای زیـادی در زمینــه‌ی ریاضـیات، فیزیک، علوم کامپیوتر و مهندسی یافته است. اخیرا استفاده از بسته توابع موجک[2] برای آنالیزهای ریاضـی، رونـق یافتـه است. اسـتفاده از موجـک در آنـالیزهـای عـددی معـادلات دیفرانسیل در چند سال گذشته پیشرفت زیادی کرده است. وجود مشکلات زیـاد در حـل معـادلات دیفرانسـیل اعـم از معمولی یا پاره‌ای چه از طریق حل‌هـای عـددی و یـا حـل پارامتری گریبان مهندسین را گرفته‌است. چـرا کـه اغلـب مواقع در مطالعه‌ی پدیده‌های طبیعی و آزمایش‌های عملی، نتیجه‌ی آزمایش به حل یـک معادلـه‌ی دیفرانسـیل منجـر می‌شود که به علت پیچیدگی (اعم از غیرخطـی بـودن و یـا بالابودن درجه‌ی معادله‌ی خطـی) بـه ناچـار بایـد راه‌هـایی عددی برای حل آنها یافت. در مواقع بسیاری شرایط مسـاله باعث می‌شود که راه‌های عددی شناخته شـده در آن مـورد خاص جواب عددی مناسبی بدست ندهند.[3] لذا همواره لازم است که به دنبال روش‌های عددی بهینه‌تـری بـرای آنـالیز معادلات دیفرانسیل گوناگون برای مقاصد خاص بود.

باید اذعان کرد که کاربرد موجک بسیار گسـترده بـوده و در تمامی زمینه‌ها امکان مانور برای آن وجود دارد. برای مثـال فشـرده‌سـازی اطلاعـات اعـم از تصـویر و ...، حـذف نـویز اطلاعات، پردازش سیگنال اعم از تصویر یا صـدا، آنالیزهـای عددی مانند حل معادلات دیفرانسـیل معمـولی و پـاره‌ای و سایر کاربرد های آن [1]. موجک Haar که در ادامه به آن خواهیم پرداخت، در میان سایر موجک‌ها به علـت سـادگی، محبوبیت بیشتری نسبت به سایر موجک‌ها پیدا کرده است.

1 Wavelet
2 Wavelet Packets
[3] یکی از شرایطی که در دقت جواب های بدست آمده از راه های عددی دخیل است وضعیت stiffness توابع می باشد. به توابعی که معمولا در برابر روش های عددی، جواب های مناسبی نمی دهند stiff اتلاق می شود.

۲- موجک

خاصیت تعامد[4]: گوییم f و g بر هم متعامد[5] هستند، اگـر حاصلضرب داخلی آنها صفر باشد. در واقع:

$$f \perp g \quad \Leftrightarrow \quad <f,g> = \int f g^* = 0 \quad (۱)$$

بـا توجـه بـه تعریـف بـالا مجموعـه‌ای ماننـد $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ را "مجموعه‌ی متعامـد" گـوییم کـه $<f_m, f_n> = \delta_{m,n}$ که $\delta_{m,n}$ دلتای کرانکر است:

4 Orthogonality
5 Orthogonal

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases} \quad (۲)$$

در صورتی که بتوان هر تـابع دلخـواه f را بصـورت ترکیـب خطی یکتا از مجموعه ی توابع متعامد $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ با ضرایب حقیقی c_i نوشت، بطوریکه:

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k f_k \quad (۳)$$

به $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک "مجموعه‌ی پایه‌ی متعامد[6]" گفتـه مـی-شود. در واقع هر سیگنال را می‌توان با داشتن ضرایب توابـع پایـه‌ی آن دوبـاره بازسـازی کـرده و بدسـت آورد. یکـی از مهمترین و پرکاربردترین مجموعه توابع پایه، پایه‌های بسـط سری فوریه‌ی برای توابع متناوب است که توابـع پایـه‌ی آن منحنی‌های سینوسی/کسینوسی یا به عبـارتی دیگـر توابـع نمایی مختلط و برای بسط تیلور این توابع پایه، چند جمله-ای ها هستند. روش‌های دیگر از بسط توابع وجود دارند کـه در بسط آنها از فراکتال‌ها و یا Spline ها استفاده می‌شـود. در تبدیل گسسته موجک یک سیگنال[7] از موجک‌هـا بـرای بسط یک تابع استفاده می‌شود. در واقع موجک‌ها مجموعه-ای از توابع متعامد پایه بـرای سـاختن توابـع (معمـولا یـک بعدی) هستند.

اگر از نماد $\{\psi_k^j(x); j,k = 1,2,3,\ldots\}$ بـرای نشـان دادن توابع پایه‌ی موجک اسـتفاده کنـیم، مـی تـوان بسـط ترکیـــــب خطـــــی تـــــابع را بصــــــورت $f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k}\psi_k^j(t)$ نشان داد. بطور عام بدست آوردن ضـــرایب $a_{j,k}$ را "تبـــدیل گسســـته‌ی موجـــک" (DWT)[8] و عملیات ساخت تابع $f(t)$ را از روی ضرایب و توابع پایه را عکس تبدیل آن(IDWT[9]) می‌گویند. معمـولا به پایه‌های $\psi_k^j(x)$ تابع موجک[10] یا موجـک‌هـای مـادر[11] گفته می‌شود.

در شرایطی که سری فوریه یک سیگنال را از یک بعد زمان به یک بعد از مجموعه‌ای از ضرایب تبدیل می کند، تبـدیل گسسته‌ی موجک، یک سیگنال در یک بعد را به مجموعه‌ی دوبعدی از ضرایب تبدیل مـی‌کنـد. ایـن آرایـه‌ی دوبعـدی امکان مکان‌یابی سیگنال را چه در مقیـاس زمـان و چـه در مقیاس فرکانس را می دهد. در صورتی که مجموعه ضرایب سـری فوریـه، تنهـا اطلاعـاتی را در مـورد نحـوه‌ی توزیـع فرکانس‌هـای یـک سـیگنال را بـه مـا مـی دهنـد. یکـی از اشکالاتی که اینجا ایجاد می شود، این است که ممکن است دو سیگنال متفاوت تنهـا بـه علـت فرکـانس‌هـای مشـترک موجود در آنها، دارای بسـط ضـرایب فوریـه شـبیه بـه هـم باشند. در صورتی که ضرایب موجک امکان مکان یابی را در دو بعد زمان و فرکانس را به ما می دهنـد. بـه ایـن ویژگـی ذکر شده که به آن ماهیت چندرزلوشـنه[12] موجـک‌هـا نیـز گفته می‌شود، باعث شده‌است این ابزار در کارهای پردازشی اعم از سیگنال و یا تصـویر و یـا ... جایگـاه خاصـی بدسـت آورد[2].

یکی از دلایلی که باعث برتری آنالیز موجک بر سایر نمونـه-های مشابه آن می شود، میل سریع ضـرایب حقیقـی توابـع پایه آن به ازای کـلاس‌هـای مختلـف از سـیگنال‌هـا اسـت. ویژگی وابستگیِ کمِ سرعتِ همگرایی ضرایب به نوع تـابع[13] بسیار مهم است. چرا که می توان در شرایط مختلط و بـی-توجه به سیگنال هـدف از تقریـب مـورد نظـر بـرای توابـع استفاده کرد. این دو ویژگی اخیر باعث توانمندی ایـن ابـزار در مطالعات مربوط به فشرده‌سازی تصویر و سـیگنال، رفـع نویز و شناسایی آن در تصاویر و سیگنال‌ها شده است. بسط موجک توانایی همگرایی دقیق‌تری در مقیـاس محلـی دارد. هریک از اجزای سری فوریه، در کل بازه زمانی، بر سـیگنال اثـر مـی‌گذارنـد. در صـورتی کـه پایـه‌هـای موجـک دارای خاصـیت محلـی[14] بـوده و ویژگـی‌هـای سـیگنال را در همسایگی نقطه در نظر می‌گیرند. به همین دلیل اسـت کـه در نقاط ناپیوستگی همگرایی قابـل ملاحظـه‌ای نسـبت بـه سری فوریه دارند. باید اشاره کرد که تنها یک نـوع موجـک وجود ندارد. بلکـه انـواع و اقسـام موجـک‌هـا بـرای مقاصـد مختلف طراحی شده اند. لذا در مقاصد خـاص مـی تـوان از موجک‌هایی خاص با توجه به ویژگی‌های آنها استفاده کرد.

می‌توان هر تابع دلخـواه را بـر اسـاس موجـک‌هـای پایـه‌ی

6 Orthogonal Basis
7 Discrete Wavelet Transform
8 Discrete Wavelet Transform
9 Inverse Discrete Wavelet Transform
10 Wavelet Function
11 Mother Wavelet

12 Multi-resolution
13 Unconditional Basis
14 Local

متعامد با پارامترهای مقیاس[15] و جابجایی[16] گسسته (معمولا توانی از ۲[17]) گسترش داد. همانطور که گفته شد $\psi(x)$ یک موجک مادر یا تابع موجک یک بعدی نامیده می شود. سایر اعضای موجک‌ها بر اساس موجک مادر، بصورت زیر تعریف می شود:

$$\left\{ \psi_k^j(x) = a_j^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{x-b_k^j}{a_j}\right) \ : \ j,k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \right\} \quad (۴)$$

$\psi_k^j(x)$ تابع موجک با مقیاس $a_j = a_0 2^{-j}$ است که در مکان $b_k^j = a_j k$ قرار گرفته‌است.

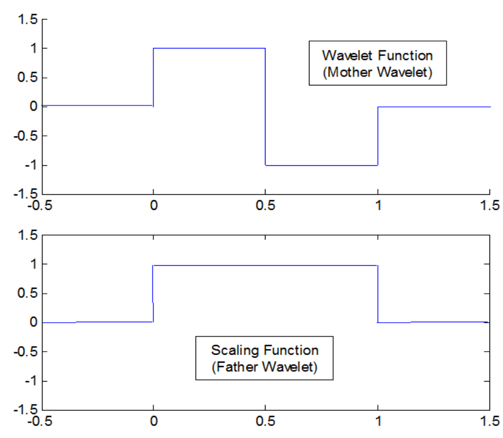
۳- تقریب توابع

در ادامه با معرفی ساده‌ترین رده از موجک‌ها با نام موجک Haar، سعی داریم عملیات تقریب و حل معادلات را با استفاده از آن انجام دهیم.

۳.۱ موجک Haar

موجکHaar در سال ۱۹۱۰ توسط ریاضی‌دان مجارستانی، آلفرد هار معرفی و استفاده شد. موجک Haar مجموعه‌ی متعامد[18] و کاملی[19] از توابع پایه را شامل می‌شود که می‌توان از آنها برای تقریب توابع گسسته و پیوسته‌ی تکه‌ای استفاده کرد.

خاص‌ترین حالت موجک Haar بصورت شکل ۱ است.



شکل ۱:موجک Haar؛ تابع موجک و تابع مقیاس

15 Scaling
16 Translation
17 Dyadic
18 Orthogonal Set
19 Complete Set

موجک Haar[20] استفاده گسترده‌ای در پردازش سیگنال مخابرات و تحقیقات فیزیک دارد. در واقع این موجک علیرغم سادگی آن، که در واقع از دو تابع مستطیلی برعکس هم تشکیل شده است، ابزار ریاضی بسیار قدرتمندی است. خانواده‌ی این موجک به این صورت تعریف می شود:

$$\psi_{0,k}(x) = \psi(x-k) \quad \text{انتقال:} \quad (۵)$$
$$\psi_{j,0}(x) = \psi(2^j x) \quad \text{تغییر مقیاس:} \quad (۶)$$
$$\psi_{j,k}(x) = \psi(2^j x - k) \quad \text{تغییر مقیاس و انتقال:} \quad (۷)$$

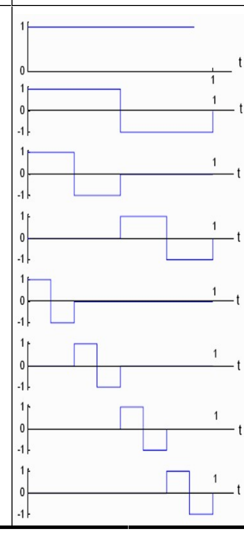
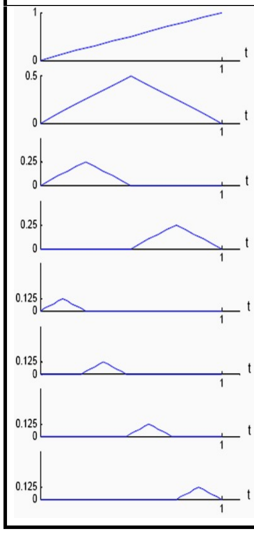
در حالت کلی می‌توان موجک Haar را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\boldsymbol{h_i(t)} = \begin{cases} 1, & \frac{k}{m} \le t < \frac{k+0.5}{m} \\ -1, & \frac{k+0.5}{m} \le t < \frac{k+1}{m} \\ 0, & elsewhere \end{cases} \quad (۸)$$

بطوریکه m پارامتر مقیاس[21] با مقادیر $m = 2^j$ (j=0,1,2,…,J) و k پارامتر انتقال با مقادیر k=0,1,2….m-1 است. بالاترین کیفیت زمانی رخ می‌دهد که مقدار j در پارامتر مقیاس m به بالاترین مقدار خود، یعنی J برسد. در جدول ۱ چند خانواده‌ی اول از موجک Haar دیده می شود[3]. با افزوده شدن به پارامتر انتقال، موجک به اندازه‌ی طول آن به سمت راست انتقال می یابد. این مساله امکان نمایش جزئیات را در محور زمان می‌دهد. با عوض شدن مقدار j اندازه‌ی مقیاس موجک تغییر می‌کند. این مساله این امکان را می دهد که بتوان جزئیات سیگنال را با دقت بیشتری نشان داد. بطور مشابه در سری فوریه تنها مقادیر ممکن برای k، صفر و $\frac{\pi}{2}$ است که موجب ایجاد کسینوس و سینوس در یک مقیاس از دقت می‌شود. در واقع می‌توان گفت سری فوریه نیز یک بسط دو بعدی است که یکی از ابعاد آن تنها دارای دو عضو است. به همین خاطر به راحتی می توان آن را بصورت یک بعدی(یک سری) نوشت.

[20] موجک Haar در واقع همان موجک Daubechies مرتبه ی ۱ است.
21 Scaling Parameter

جدول ۱: موجک Haar به همراه انتگرال‌های آن

$h_i(t)$	تابع Haar	انتگرال تابع Haar
$h_0(t)$ $h_1(t)$ $h_2(t)$ $h_3(t)$ $h_4(t)$ $h_5(t)$ $h_6(t)$ $h_7(t)$ $h_8(t)$		

هر تابع $y(x) \in L^2[0,1)$ را می توان بصورت زیر تجزیه کرد:

$$f_J(t) = c_0 + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} < f(t), \psi_{j,k}(t) > \psi_{j,k}(t) \quad (۹)$$

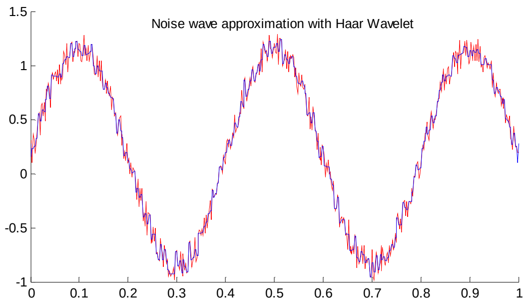
$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2j}} \psi(2^j t - k) \quad (۱۰)$$

در واقع در سری بالا، ضرایب سری، حاصل ضرب داخلی زیر است:

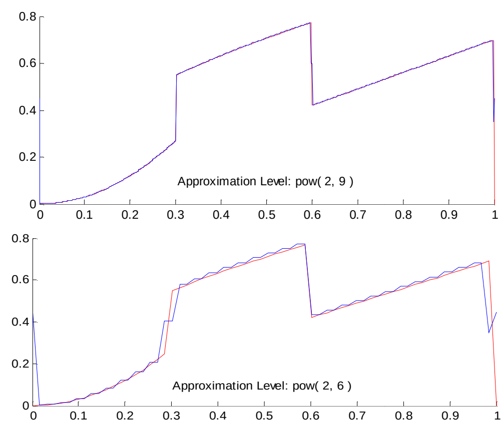
$$c_n = < f(t), \psi_{j,k}(t) >= \int_0^1 f(t). \psi_{j,k}(t)\, dt \quad (۱۱)$$

$$c_0 = < f(t), 1 >= \int_0^1 f(t)\, dt \quad (۱۲)$$

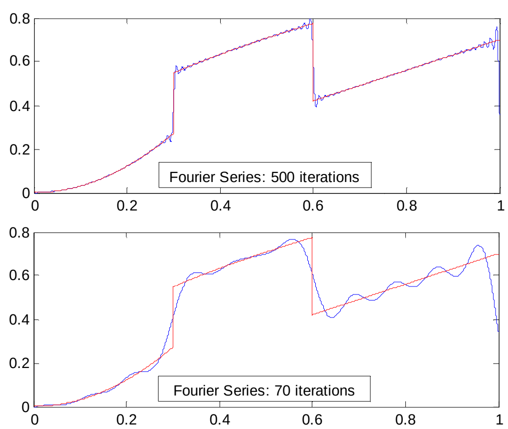
قابل ذکر است که هرچه که مقدار J بیشتر شود، می‌توان به دقت بیشتری از تقریب دست یافت. برای مثال چندین تقریب به ازای مقادیر مشخص شده، برای توابع در شکل های ۲ و ۳ دیده می شود. در شکل ۲ دیده می شود که علیرغم تغییرات بسیار و سریع تابع اصلی، تقریب آن بوسیله‌ی موجک به خوبی به آن همگرا شده است. در شکل ۳ تابعی گسسته به همراه تقریب آن بوسیله‌ی موجک نشان داده شده‌است. مشاهده می‌شود با افزایش جملات در سری فوریه، پدیده گیبس[۲۲] در نقاط ناپیوستگی بروز می کند، در صورتی که تقریب با استفاده از موجک با دقت بالایی همگرا می شود.



شکل۲: تقریب سیگنال نویز به وسیله‌ی موجک Haar



شکل۳: تقریب یک تابع گسسته به وسیله‌ی دو تقریب متفاوت با موجک Haar



شکل ۴:تقریب یک تابع گسسته به وسیله ی دو تقریب متفاوت با سری فوریه و مشاهده‌ی پدیده‌ی گیبس

22 Gibbs Phenomenon

۴- تقریب توابع n-بعدی :

برای بدست آوردن توابع پایه‌ی موجک در n-بعد، می‌توان موجک‌های پایه را از حاصلضرب موجک های پایه‌ی یک بعدی بدست آورد[4]:

$$\psi_{\mathbf{k}}^{j}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} a_{x_{i},j}^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x_i - b_{k_i}^{j}}{a_{x_{i},j}}\right) \quad (۱۳)$$

در عبارت بالا، x و k بردار n-بعدی هستند. در واقع $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ و $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ و در نتیجه $a_{x_{i},j}$ و $b_k = (b_{k_1}, \dots, b_{k_n})$ پارامتر های مکان و مقیاس موجک در n بعد و در مرتبه ی j ام دقت هستند. باید متذکر شد، به علت پیچیدگی ایجاد شده در بیش از ۲ بعد و هزینه‌ی بالای محاسباتی آن، در عمل معمولا از موجک های با ابعاد بیشتر از ۲ بعد استفاده نمی‌شود. البته می توان این محدودیت را به دقت تقریب j-ام منتقل کرد. در واقع اگر فرض کنیم تابع $u(\mathbf{x})$ روی محدوده‌ی Ω تعریف شده‌باشد، دقت j=0 پایین‌ترین دقت در تقریب، در محاسبه‌ی تابع مذکور است. در واقع محدودیت‌های محاسباتی و حافظه‌ای، مرتبه‌ی تقریب تابع را محدود کرده‌اند. بنابرین تابع $u(\mathbf{x})$ را می‌توان فقط تا دقت خاصی مانند j=J تقریب زد. لذا برای تقریب در n-بعد، مجموعه‌ی n-بعدی صحیح Z_Ω وجود دارد که می‌توان تابع n-بعدی $u(\mathbf{x})$ را به این صورت تقریب زد:

$$u^{J}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{J} \sum_{k \in Z_\Omega} c_{\mathbf{k}}^{j} \psi_{\mathbf{k}}^{j}(x) \quad (۱۴)$$

۵- حل معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از موجک Haar

روش‌های عددی مختلفی با استفاده از موجک‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل ارائه شده‌است. اکثر این روش‌ها، بهینه‌سازی روی روش‌های عددی موجود برای حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تئوری موجک است. از جمله روش Galerkin یا روش ممان[23]، Collocation Points [5] و بهینه سازی روش هایی از جمله روش اجزا محدود (FEM)[24] یا مسائل اجزاء مرزی (BEM)[25] که خود روش‌های عددی شناخته شده‌ای هستند و توسط تئوری موجک بهینه‌تر شده‌اند. در شرایطی که تمامی این روش‌ها برای بهینه سازی جواب‌ها و آسان‌کردن و سرعت بخشیدن به رسیدن به جواب‌ها نسبت به روش‌های قبلی مطرح شده‌اند، پیچیدگی‌های موجود در تئوری موجک، باعث عدم تمایل به استفاده از این ابزار درآنالیزهای عددی موجود شده است. آشکار است که استفاده از موجک Haar به عنوان ساده‌ترین موجک موجود می‌تواند محاسبات و پیچیدگی را به حداقل مقدار خود برساند.

از آنجایی که مشتق در نقاط ناپیوستگی وجود ندارد، امکان استفاده از موجک Haar به علت ناپیوستگی آن، برای حل معادلات دیفرانسیل بصورت مستقیم وجود ندارد. برای حل این مشکل دو راه حل کلی وجود دارد: **الف)** هموار کردن موجک Haar با استفاده از درون‌یابی که توسط Cattani[6] ارائه شد. این کار به شدت موجب پیچیدگی کار شده و در واقع یکی از مهمترین مزایای موجک Haar یعنی سادگی کار با آن را از بین می برد.

ب) استفاده از روش انتگرالی که توسط Chen و Hsiao [7] معرفی شد و توسط محققین مختلفی مورد توجه قرار گرفت. اینجا نیز از این طریق مسائل تحلیل خواهند شد. ایده‌ی اصلی این تکنیک آن است که یک معادله‌ی دیفرانسیل به یک معادله‌ی ماتریسی جبری تبدیل و حل می‌شود.

در حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از این موجک، Chen و Hsiao [3] توانسته‌اند با بدست‌آوردن ماتریس های ضرایبی (ماتریس عملیاتی Haar[26]) برای مرتبه‌های مختلف، یک راه حل عمومی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی با شرایط مقدار مرزی ارائه کنند و از آن در مدل-سازی یک سیستم دینامیکی استفاده کنند. بر اساس موجک Haar، Lepik [3] با استفاده از روش معرفی شده توسط Chen و Hsiao، توانسته شیوه‌ای برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی[27] ارائه کند.

23 Method of Moments
24 Finite Element Method
25 Boundary Element Method
26 Haar Operational Matrix
27 Nonlinear ODEs

۵.۱. روش Chen and Hsiao (CHM) برای حل معادله دیفرانسیل خطی

با توجه به رابطه‌ی (۸) برای معرفی کلاس توابع پایه‌ی Haar معرفی شدکه m پارامتر مقیاس[۲۸] با مقادیر $m = 2^{j}$(j = 0,1,2 ... J) و k پارامتر انتقال با مقادیر k=0,1,2….m-1 است. در صورتی اندیس i در نظر گرفته شود بطوریکه i = m+k+1 ؛ در اینصورت به ازای m=1,k=0، کمترین مقدار i=2 می‌باشد و به ازای $m=2^{J}$ داریم: $i=2M=2^{J+1}$. اگر مقدار i=1 را فرض قرار داده شود، شکل حاصل متناظر با تابع مقیاس $h_1(t) = 1$ در بازه [0,1] نشان داده شده در شکل ۱ خواهد بود.

برای انجام عملیات محاسباتی روی توابع مورد نظر، باید نقاط گسسته سازی شوند. به این ترتیب که نقاطی متناظر با زمان مجازی یا Collocation Points در نظر گرفته می‌شوند:

$$t_l = \frac{l - 0.5}{2M}, \qquad (l = 1,2 \dots 2M)$$

با این کار ماتریس ضرایب $H(i,l) = [h_i(t_l)]$ تعریف می‌شود که دارای ابعاد $2M \times 2M$ است:

$$H_{m\times m} \triangleq [h_m(t_0)\ h_m(t_1)\ \dots\ h_m(t_{m-1})]$$

در واقع برای استفاده از موجک Haar برای عملیات عددی گوناگون، از ماتریس ضرایب آن استفاده خواهد شد. استفاده از ساختار ماتریسی برای ساده‌سازی عملیات محاسبه است.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

در ادامه‌ی توضیحاتی که در رابطه با ماتریس H اشاره کردیم، ماتریس P به عنوان ماتریس عملیاتی[۲۹] اینگونه تعریف می شود:

$$[PH]_{il} = \int_0^{t_l} h_i(t)\, dt \quad (۱۵)$$

مشخص است که این ماتریس دارای 2M سطر و ستون است. با توجه به رابطه‌ی (۱۵)، می‌توان چندین عضو اولیه از خانواده‌ی ماتریس P را از روی ماتریس های H معرفی شده بدست آورد.

$$P_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_8 = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 32 & -16 & -8 & -8 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 16 & 0 & -8 & 8 & -4 & -4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

باید تاکید کرد که محاسبه‌ی این ماتریس‌ها تنها برای بار اول کافی است و با یکبار محاسبه، می توان آنها را برای هر معادله‌ی دلخواه بکار برد. در واقع در هر بار محاسبه‌ی جواب معادله، از مقادیر محاسبه‌ی شده‌ی قبلی برای ماتریس های P و H استفاده می‌شود.

برای بدست‌آوردن سرعت بیشتر در محاسبات این ماتریس ها، کافی است از طریق رابطه‌ی بازگشتی زیر به ماتریس-های با مرتبه‌ی بالاتر دست یافت[7]:

28 Scaling Parameter

29 Operational Matrix

$$P_{\mu} = \begin{bmatrix} P_{0.5\mu} & -\frac{1}{2\mu} H_{0.5\mu} \\ \frac{1}{2\mu} H_{0.5\mu}^{-1} & O \end{bmatrix}$$

$$H_{m\times m}^{-1} = \frac{1}{m} H_{m\times m}^{T} diag(r) \quad (۱۶)$$

در این روش بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله، توسط موجک Haar بسط داده می شود و براساس آن مشتقات دیگر موجود در معادله بدست می‌آیند. علت این امر را باید در گسستگی تابع Haar جستجو نمود. چرا که این گسستگی مانعی برای مشتق پذیری این تابع است. بنابراین با در نظر گرفتن بالاترین مرتبه‌ی مشتق وگرفتن انتگرال‌های متوالی از آن، می‌توان معادله را برحسب بسط موجک با ضرایب مجهول نوشت.

برای راحتی عملیات محاسباتی بهتر است از شکل ماتریسی معادله استفاده نمود. این کار باعث می‌شود تا بتوان از ماتریس H و P استفاده نمود. از آنجایی که ماتریس H و H^{-1} دارای صفرهای زیادی هستند و از قبل معلوم اند، با بکارگیری ساختار داده‌های مربوط به ماتریس‌های اسپارس[30] باعث زیادشدن سرعت محاسبات در موجک Haar نسبت به تبدیل فوریه[31] یا تبدیل ولش[32] می‌شوند[8]. با انتخاب 2M نقطه روی بازه‌ی حل و تشکیل ماتریس‌های P_{2M*2M} و H_{2M*2M} و استفاده از رابطه‌ی (۱۷) (m مرتبه‌ی معادله است)، پس از جایگذاری در معادله‌ی مفروض، معادله‌ای ماتریسی و خطی بدست می‌آید که با روش‌های متداول به سادگی حل خواهد شد.

$$y^{(n)}(t) \triangleq Y_{(n)} = (P^{n}H)X + \sum_{i=0}^{m-n-1} \frac{y^{(n+i)}(0)}{i!} T^{(.)i} \quad (۱۷)$$

در رابطه‌ی(۱۷)، ماتریس X همان ضرایب مجهول موجک می باشد که ابعاد 2M*1 را داراست. ماتریس I نیز دارای همین ابعاد است. مقادیر این ماتریس، مقدار ورودی را در هر نقطه از بازه‌ی حل نشان می دهد. همانطور که ذکر شد m مرتبه‌ی معادله است. ماتریس T همان ماتریس نقاط

بازه‌ی حل است و عملگر (.) به معنای به توان رساندن تک تک درایه‌ها می باشد. این ماتریس معادل تابع f(t)=t است که عملگر (.) توان های آن را محاسبه می‌کند.

مثال: معادله ی دیفرانسیل خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$y''' + ay'' + by' + cy = i(t)$$

این معادله با ضرایب ثابت است. با جایگذاری مشتقات برحسب موجک Haar و انتگرال‌های متوالی آن معادله‌ی ماتریسی به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} HX + a(PH)X + b(P^2H)X + c(P^3H)X \\ = I - [ay''(0) + by'(0) \\ + cy(0)]\, T^{(.)0} - [by''(0) \\ + cy'(0)]T^{(.)1} \\ - \frac{cy''(0)}{2} T^{(.)2} \end{aligned}$$

حل این معادله‌ی ماتریسی به سادگی امکان‌پذیر است. در نهایت جواب y به صورت زیر محاسبه خواهدشد:

$$Y = (P^3H)X + \frac{y''(0)}{2!} T^{(.)2} + \frac{y'(0)}{1!} T^{(.)1} + \frac{y(0)}{0!} T^{(.)0}$$

که مقادیر y(t) را به صورت ماتریس Y نشان می‌دهد.

به عنوان نمونه مقادیر زیر را درنظر می‌گیریم:

$$a = 1\,, b = 0\,, c = 2$$
$$i(t) = \sin(5\,t)\,,$$
$$y''(0) = 0, y'(0) = 0, y(0) = 0$$

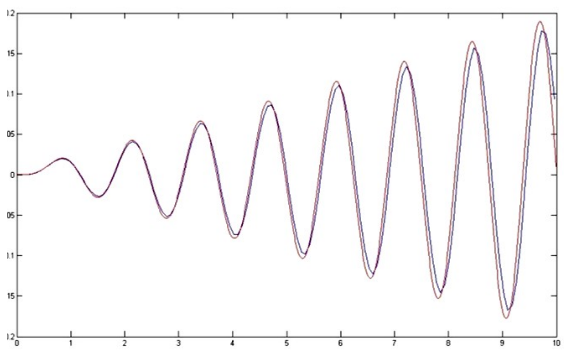
$$y''' + y'' + 25y' + 25y = \sin\,(5\,t)$$

جواب دقیق این معادله به صورت زیر خواهد شد:

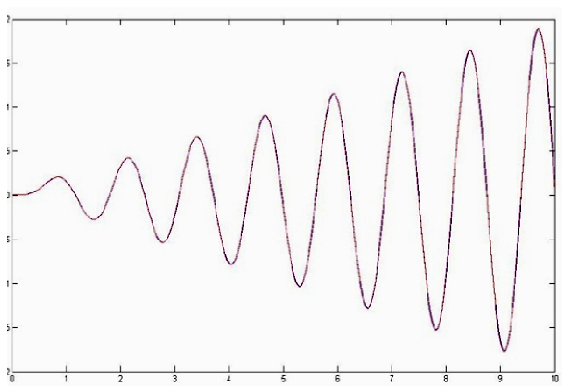
$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}\left(125 + \mathrm{e}^{t}(-5(25 + 13t)\mathrm{Cos}[5t] + (38 - 325t)\mathrm{Sin}[5t])\right)}{16900}$$

به ازای $2M = 128, 2M = 512$ پاسخ با استفاده از موجک همراه با پاسخ دقیق در شکل های ۵ و ۶ نشان داده شده‌است.

30 Sparse Matrix
31 Fourier Transform
32 Walsh Transform



شکل۵: تقریب جواب معادله ی دیفرانسیل مثال مطرح شده به ازای 2M=128 در مقایسه با جواب دقیق



شکل۶: تقریب جواب معادله ی دیفرانسیل مثال مطرح شده به ازای 2M=512 در مقایسه با جواب دقیق

۶- نتیجه گیری و کار آینده

در این مقاله، علاوه بر معرفی کلی موجک‌ها و بررسی موجک Haar و استفاده از آن برای تقریب توابع، روش CHM برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال مورد بررسی واقع شد.

با توجه به گستردگی ایده های مطرح شده در حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل، مطالعه و تحقیق روی بهینه-سازی یا نوآوری در طرح های موجود، کاری زمان‌بر است. از طرفی با توجه به جدید بودن این روش‌ها و همچنین کاربردهای ناشناخته‌ی بسیار آنها در علوم مهندسی، می-توان پیش‌بینی کرد، موجک و کاربرد آن در آنالیزهای عددی و مسائل بهینه سازی، بسیار جای کار دارد.

در مورد کاربرد موجک در حل ODE و PDE، بجز روش CHM، روش‌هایی از جمله روش قطعه قطعه-سازی(SM)[33][9] و روش تقریب تکه ای ثابت (PCA)[34] هستند که در[6] و[7] و[10] بررسی شده‌اند. در[3] به بررسی و مقایسه‌ی سرعت و همگرایی و پیچیدگی این روش‌ها پرداخته شده است. با توجه به نتایج حاصل CHM روشی ساده و در عین حال روشی سریع است. سرعت آن به این علت است که اکثر درایه‌های ماتریس های P و H صفر می باشند. اشکال روش CHM، عدم پایداری آن برای تقریب‌های مرتبه‌ی بالاتر است. این مساله با مثال-هایی در [3] نشان داده شده است. در [11] روش مذکور با کاربردهایی برای آنالیز سیستم های stiff بکاربرده شده است.

بر اساس این ایده ها، روش Galerkin-Wavelet (GMW) به عنوان روشی برای حل عددی PDE، مورد توجه است و روی آن کار می شود[12]. ترکیب ایده‌ی موجک و روش اجزاء محدود نیز از ایده‌های جالب برای حل معادلات PDE (WFEM)[35] است جای کار بسیاری روی آن است.

سپاسگزاری

نویسندگان از جناب آقای دکتر غلامرضا مرادی به خاطر راهنمایی‌های ایشان در روند پروژه، تشکر و قدردانی می-نمایند.

مراجع

[1] P.Chang, P.PiauSimple, "Procedure for the Designation of Haar Wavelet Matrices for Differential Equations", *International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists*, 2008.

[2] A.W.Galli, G.T.Heydt and P.F.Ribeiro, "Exploring the Power of Wavelet Analysis", *IEEE Computer Application in Power*, Oct 1996, pp.37 – 41.

[3] U.Lepik, "Numerical Solution of Differential Equations Using Haar Wavelets", *Mathematics and Computers in Simulation* 68 (2005) 127–143

33 Segmentation Method
34 Piecewise Constant Approximation
35 Wavelet Finite Element Method

[9] J.Majak, M.Pohlak, M.Eerme, T.Lepikult, "Weak formulation based Haar Wavelet Method for Solving Differential Equations", *Applied Mathematics and Computations*, 211(2009) pp. 488-494.

[10] G.Hariharan, K. Kannan, "Haar Wavelet Method for Solving Cahn-Allen Equation", *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 3, 2009, no. 51, 2523 - 2533

[11] U.Lepik, "Haar Wavelet Method for Solving Stiff Differential Equations", *Mathematical Modeling and Analysis*, Vol.14, No. 4, 2009, pp. 467-481.

[12] H.Akca, M.H.Ali-Lail, "Survey on Wavelet Transform and Application on ODE and Wavelet Network", *Advances in Dynamical Systems and Applications*, Vol.1-Number 2(2006), pp.129-162.

[4] S.Mallat, "a Wavelet Tour of Signal Processing, The Sparse Way", 3rd Edition, 2009, Elsevier Pub.

[5] R.Dai, J.E.Cochran, "Wavelet Collocation Method for Optimal Control Problems", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 143, No. 2 / November, 2009.

[6] C.Cattani, "Haar wavelet spline", *Journal of Interdisciplinary Math.*4 (2001) 35-47.

[7] C.F.Chen, C.H.Hsiao, "Haar Wavelet Method for Solving Lumped and Distributed-Parameter Systems",*IEEEProc*.Pt.D144 (1)(1997) 87-94.

[8] P.Chang, P.Piau, "Haar Wavelet Matrices Designations in Numerical Solution of Ordinary Differential Equations", *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, Volume 38 Issue 3(2008).